

ÜBER DIE MERCATORPROJEKTION

Zum 50jährigen Bestehen des Mercator-Gymnasiums Duisburg.

B. Kyewski

Mit 5 Abbildungen

1. Einleitung:

Die großen Entdeckungen des 16. Jahrhunderts, die das geographische Blickfeld um mehr als die Hälfte der Erde erweiterten, lösten eine neuartige Entwicklung in der Kartographie aus, welche, durch die mathematischen Schulen zu Wien und Nürnberg unter Stab und Werner eingeleitet, in den einzigartigen Kartenwerken Gerhard Mercators und der nach ihm benannten Projektion ihren ersten Glanzpunkt erreichte. Bei den neuen Kartenentwürfen wählt man den Äquator zur Hauptbezugslinie, den Nordpol zum wichtigsten Bezugspunkt. Dem 15. Jahrhundert waren graduierte Karten völlig unbekannt. Jetzt versucht man die Abnahme der Breitenkreise mit der geographischen Breite bei den ersten flächentreuen Karten zu berücksichtigen, und nur ganz allmählich verlieren die bisher benutzten Plattkarten an Wert. Welche Bedeutung dabei den kartographischen Arbeiten Mercators zukommt, wird man erst beurteilen können, wenn man bedenkt, daß fast alle grundlegenden Kartenwerke für die Schiffs- und Flugzeugnavigation, außer den Polgebieten, bis in unsere moderne Zeit nach der von ihm entwickelten Projektion hergestellt worden sind. Für die immer bedeutsamer werdende Navigation in den Polgebieten kann die alte winkeltreue Hipparchkarte (125 v. Chr.) verwandt werden.

2. Die Ortho- und Loxodromen

Für die Schiffs- und Flugzeugnavigation sind auf der Kugeloberfläche zwei Kurvenarten besonders wichtig, die nach Snellius als Ortho- und Loxodromen bezeichnet werden. Spannt man zwischen zwei beliebig gewählten Punkten der Kugeloberfläche einen Gummifaden, so wird dieser die kürzeste Entfernung oder die geodätische Linie darstellen. Ergänzt man das Gummifadenstück zu einem Vollkreis, so erhält man einen Großkreis oder die Orthodrome der Kugel. Da es in Wirklichkeit unmöglich ist, so ideal es

wäre, mit einem Kompaß z. B. längs einer Orthodrome zu fliegen, ohne beständig den Kurswinkel zu ändern, ersetzt man in der Praxis die Orthodrome stückweise durch Loxodromen, also Kurven konstanten Kurses, die auf der Kugel alle Meridiane unter gleichen Winkeln schneiden und in ihrem Verlauf logarithmische Spiralen darstellen.

In der älteren Schrift zur Nautik „Tratado da sphaera“ von *Pedro Nuñez* aus dem Jahre 1537*) findet sich eine recht symmetrische Figur über acht doppelgekrümmte Loxodromen, die bei ihrer näheren Prüfung in niederen und mittleren Breiten erhebliche Fehler aufweisen und dazu im Pol zusammenlaufen, während sie eigentlich in immer enger werdenden Windungen sich dem Pol nähern müßten, ohne ihn je zu erreichen. Ferner enthält die Schrift den ersten eindeutigen Hinweis, daß Loxodromen keine Großkreise der Kugel sein können. Die Portugiesen (6) hatten infolge dieser Unkenntnis einmal bei ihren amerikanischen Fahrten den Äquator verfehlt, obwohl sie unter gleichem Kurs gesegelt waren.

Wie *H. Wagner* (10) vermutet, wird G. Mercator wahrscheinlich von dieser wichtigen portugiesischen Schrift Kenntnis gehabt haben, als er 1541 seinen ersten Globus mit Strichrosen richtig eingezeichneter Loxodromen versah. Eine 1566, später 1573 und 1592 gedruckte Schrift von Nuñez kann für die Weltkarte von 1569 wesentlich gewesen sein, entfällt aber für den Globus vom Jahre 1541. Obwohl selbst Frisius Gemma an dem angenäherten Verlauf der Loxodromen nach Nuñez festhielt, gebührt Mercator das große Verdienst, als einer der ersten Globusstreifen und Karten mit richtig gezeichneten Loxodromen angefertigt zu haben.

*) *Pedro Nuñez*: *Tratado da sphaera*, Lisboa 1537.

H. D. Wilckens: Über eine portugiesische Handschrift der Wolfenbüttler Bibliothek. Wolfenbüttel 1793.

Leider konnte folgende Schrift nicht eingesehen werden: *Guimarães, Rudolphe*, *Sur la vie et l'oeuvre de Pedro Nuñez*. *Annal. scientificos da Academia Polytechnica do Porto*, Vol. IX, X, Coimbra 1914/15.

3. Wie entsteht die Mercatorabbildung?

Betrachtet man ein kleines Trapez, welches zwischen den Meridianen vom Längenunterschied λ und den Breitenkreisen φ und $\varphi + \Delta\varphi$ liegt, und bildet es nach Mercator als Rechteck in die Ebene ab, so wird die Seite CD, wie man aus der Abb. 1 ersieht, auf die Länge AB gestreckt und

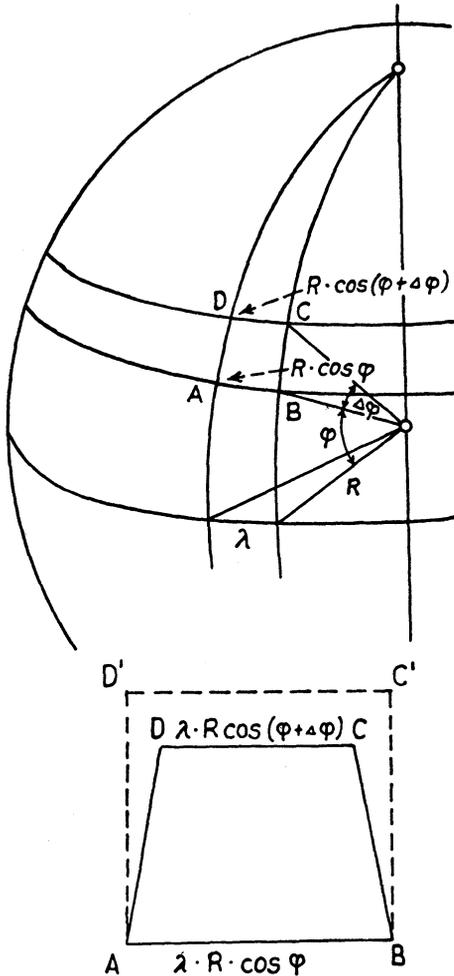


Abb. 1

die Höhe des Trapezes ABCD zum Rechteck $A B C' D'$ im gleichen Verhältnis vergrößert. Der neue Abstand der Breiten wird um den Faktor $\frac{1}{\cos(\varphi + \Delta\varphi)} = \sec(\varphi + \Delta\varphi)$ vergrößert. Wählt man bei der Projektion das Trapez entsprechend klein, so kann von einer winkeltreuen oder konformen Abbildung zwischen Trapez und Rechteck gesprochen werden. Die erwähnten Loxodromen gehen bei der Mercatorprojektion in Geraden über, und darin liegt ihr besonderer Vor-

zug und ihre große Bedeutung. Um für eine beliebig vorgegebene geographische Breite φ die zugehörige Mercatorbreite zu finden, kann man, wie es Snellius getan hat, den Bogen φ in der Form $\varphi = n \Delta\varphi$ zerlegen. Die verlangte Genauigkeit erreicht man durch entsprechend großes n . Für die vergrößerte Breite berechnet man

$$\Phi_\varphi = r \cdot [\sec\Delta\varphi + \sec 2\Delta\varphi + \dots + \sec n\Delta\varphi]$$

$$= r \cdot \sum_1^n \sec(\nu \cdot \Delta\varphi)$$

Bei weitgehender Verfeinerung der Unterteilung geht die Summe in das bestimmte Integral der Sekansfunktion über.

4. Bisherige Interpretationen zur Mercatorprojektion

In der sehr eingehenden, gründlichen kartometrischen Analyse von *H. Wagner* (12) über die Konstruktion der Mercatorkarte von 1569 sind die eigentlichen Kartenstudien zum Abschluß gekommen, aber es konnte bisher bei allen Bemühungen, selbst unter Berücksichtigung der kleinen Abweichungen und Fehler, nicht jenes eigenartige kartographische Geheimnis gelöst werden, wie Mercator die winkeltreue Zylinderprojektion gefunden hat. Es ist unwahrscheinlich, daß er seine vergrößerten Breitenabstände durch Näherungsrechnungen, noch wie man zuerst glaubte, auf graphische Weise gefunden hat. *Breusing* (3), *Nordenskiöld* (9), *S. Günther* (7) und *Müller-Reinhard* (1) haben darüber verschiedene Hypothesen und Möglichkeiten der Lösung angegeben.

5. Die Nordenskiöld'sche Vermutung

Im Jahre 1889 veröffentlichte *A. E. Nordenskiöld* (9) in seinem Facsimile-Atlas eine Näherungsgleichung zur Berechnung der vergrößerten Breite Φ als Funktion der geographischen Breite φ :

$$\Phi_{\varphi+10} - \Phi_\varphi = \frac{10}{\cos(\varphi + 5)}$$

Diese Beziehung kann man in folgender Weise ableiten: Wählt man auf der Kugel zwischen den Breiten $\varphi - \frac{\lambda}{2}$ und $\varphi + \frac{\lambda}{2}$ ein infinitesimales Rechteck von der Höhe λ mit der Grundseite $\lambda \cdot \cos\left(\varphi + \frac{\lambda}{2}\right)$, so ergibt sich aus der Konformität nach Abb. 2:

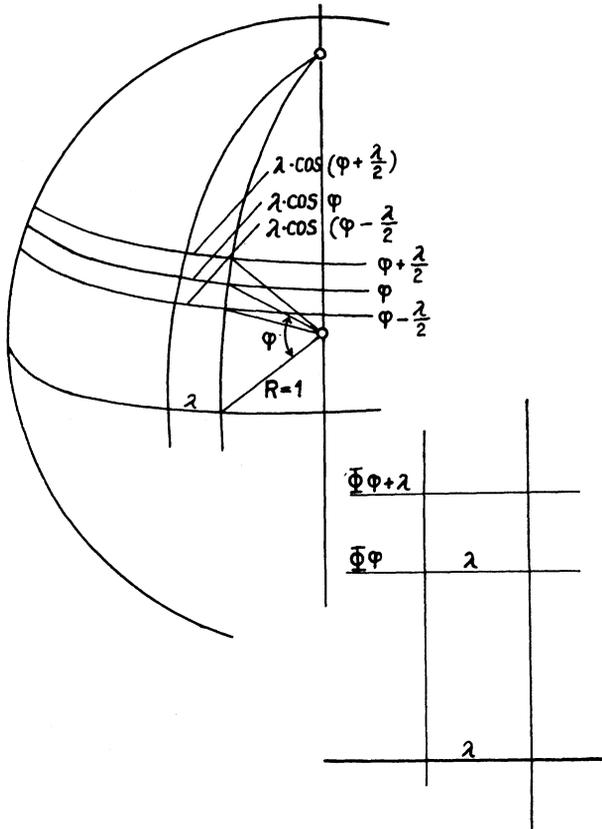


Abb. 2

$$\frac{\lambda}{\lambda \cdot \cos\left(\varphi + \frac{\lambda}{2}\right)} = \frac{\Phi_{\varphi+\lambda} - \Phi_{\varphi}}{\lambda}$$

Das ergibt

$$\Phi_{\varphi+\lambda} - \Phi_{\varphi} = \frac{\lambda}{\cos\left(\varphi + \frac{\lambda}{2}\right)}$$

Im Sonderfall $\lambda = 10^\circ$ wird:

$$\Phi_{\varphi+10} - \Phi_{\varphi} = \frac{10}{\cos(\varphi + 5)}$$

6. Näherung nach Hipparch

Wenn man von der Annahme ausgeht, daß die Idee von der vergrößerten Breite bei der Mercatorprojektion von der winkeltreuen Hipparchkarte stammt, die als stereographische oder Polarprojektion von großer Bedeutung für die Kartenkunde ist und die Mercator von seinem Lehrer Frisius Gemma her vertraut gewesen sein müßte, so liegt der Gedanke nahe, eine Beziehung, entsprechend der von Nordenskiöld, aus der stereographischen Projektion abzuleiten.

Wählt man statt der Tangentialebene durch den Südpol S eine ihr parallele Ebene durch den

Äquator, so entsteht gleichfalls eine stereographische Projektion mit dem Kartenmittelpunkt O und dem Nordpol N als Projektionszentrum. Für den Bildpunkt P' des Punktes P liest man aus Abb. 3 die Gleichung ab:

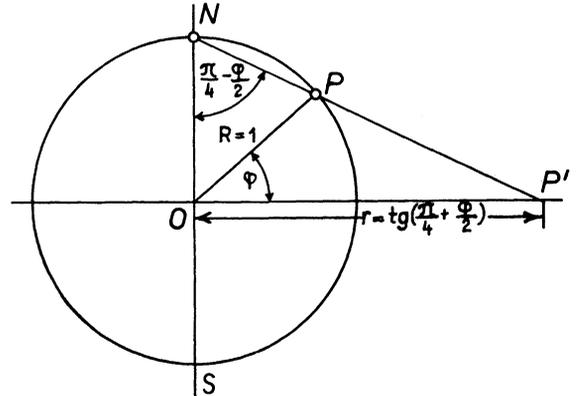


Abb. 3

$$r = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \quad \text{für } R = 1$$

Von dieser winkeltreuen Hipparchkarte her müßte ein Zusammenhang mit dem rechteckigen Gradnetz der Mercatorkarte leicht zu finden sein. Die neuen Breiten r der Hipparchkarte lassen sich nicht einfach auf das Mercatornetz übertragen, sondern müssen nach einer noch zu bestimmenden Funktion, die sich aus der Konformität ergibt, gestaucht werden. Es gelten folgende Ansätze:

$$r = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$r + \Delta r = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi + \Delta\varphi}{2}\right)$$

$$r + \frac{\Delta r}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} + \frac{\Delta\varphi}{4}\right)$$

die unter Berechnung von

$$\Delta\Phi = \frac{\Delta r}{r + \frac{\Delta r}{2}}$$

die Näherung ergibt

$$\Phi_{\varphi+\Delta\varphi} - \Phi_{\varphi} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\Delta\varphi}{2}}{\cos\left(\varphi + \frac{\Delta\varphi}{2}\right)}$$

die der Nordenskiöld'schen fast gleich und als Hipparch-Näherung bezeichnet werden könnte. Sie entfällt für die kritisch-historische Prüfung und wurde nur der Vollständigkeit halber neu hinzugefügt.

Unter Anwendung der Infinitesimalrechnung ergibt der exakt geschlossene Ausdruck für die vergrößerte Mercatorbreite:

$$\Delta \Phi = \frac{\Delta r}{r} \quad \Sigma \Delta \Phi = \Sigma \frac{\Delta r}{r} \quad \Phi = \int d\Phi = \int \frac{dr}{r}$$

$$\int \frac{dr}{r} = \ln r = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$$

Wie man dieses Ergebnis auch ohne Integralrechnung, allerdings über eine versteckte Summation erhält, kann bei H. Dörrie (5) nachgelesen werden.

7. Näherungen zur Funktion der Mercatorbreiten

In der Zeit nach Mercator sind zur exakten mathematischen Berechnung der vergrößerten Breiten eine Reihe Abhandlungen und Tafeln erschienen, u. a. von E. Wright (1599), W. Snellius (1624), C. F. M. Dechales (1690), W. Oughtred (1650), C. J. Lastman (1642), E. Halley (1696), J. de Mendoza y Rios (1791), für das Sphäroid von P. Murdoch (1741) und Maclaurin (1742) (J. Bathe (2)).

Zur Ergänzung sollen Näherungen der in Abschnitt 6 erwähnten Abbildungsfunktion mit Hilfe von Reihenabschätzungen berechnet werden. Führt man folgende Abkürzungen ein:

$$\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) = \ln z, \quad \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = x$$

so gelten die Beziehungen

$$\ln z = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2x}{1-x^2}$$

Dann lassen sich sofort die Reihenansätze hinschreiben:

$$\operatorname{tg} \varphi = 2 \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+1} \quad \text{und} \quad \ln z = \ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Die Differenzfunktion ist

$$\Delta f = \operatorname{tg} \varphi \quad \ln z = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k}{2k+1} x^{2k+1}$$

und man erhält dann:

$$\ln z = \operatorname{tg} \varphi - 2 \cdot \left[\frac{2}{3} x^3 + \frac{4}{5} x^5 + \frac{5}{6} \frac{x^7}{1-1,015 x^2} \right]$$

Geht man andererseits von der Reihe aus

$$\ln z = \ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

die für jedes positive $|x| < 1$ konvergent ist, so erhält man nach Restabschätzung durch Summierung einer geometrischen Reihe (8)

$$\ln z = 2 \cdot \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{9x^7}{63-49x^2} \right]$$

Das erste Glied dieser Reihenabschätzung ist bereits in der Hipparch-Näherung enthalten. Die ausgewerteten Funktionen sind in Tabelle 1 den theoretischen Werten gegenübergestellt. Die erste Abschätzung enthält $\operatorname{tg} \varphi$ und fällt deshalb mit ihrer Konvergenz nicht so gut aus wie die zweite.

Ferner interessiert in diesem Zusammenhang noch eine weitere Frage. Wie müssen die Projektionszentren auf der y- bzw. x-Achse in Abhängigkeit von der Breite φ bewegt werden, damit die gradlinige Projektion aller Orte des Nullmeridians auf dem anliegenden Zylinder die zugehörigen Mercatorbreiten erzeugt?

$$y^* = \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} - \frac{\cos \varphi \cdot \ln z}{1 - \cos \varphi} \quad \text{und} \quad x^* = \frac{\cos \varphi \ln z - \sin \varphi}{\ln z - \sin \varphi}$$

Abb. 4 gibt die graphischen Darstellungen der in Tabelle 2 berechnete Funktionswerte. Man ersieht ferner, wie auf den Achsen eines Glasglobus die Projektionslampe bewegt werden müßte, um auf dem Nullmeridian des anliegenden Glaszylinders die Mercatorbreiten zu erhalten.

8. Kritischer Vergleich der besprochenen Ansätze

Zum Vergleich sind in Tabelle 3 die theoretischen Werte der Breitenabstände denen von Breusing, Nordenskiöld und der Hipparch'schen Näherung gegenübergestellt. Danach liefert das

Tabelle 1

Berechnung der Näherungsfunktionen von $\ln z$ mit Hilfe von Reihenabschätzungen

φ	Bogen	$\ln z = \operatorname{tg} \varphi -$				$\ln z =$	
		Grad	Bogen	Grad	Bogen	Grad	
0	0	0	0	0	0	0	
10°	0,1754	10,05	0,1754	10,05	0,1754	10,05	
20°	0,3564	20,42	0,3564	20,42	0,3564	20,42	
30°	0,5493	31,47	0,5493	31,48	0,5492	31,47	
40°	0,7629	43,71	0,7630	43,72	0,7629	43,71	
50°	1,010	57,91	1,011	57,92	1,010	57,91	
60°	1,317	75,45	1,318	75,56	1,317	75,44	
70°	1,735	99,43	1,743	99,81	1,735	99,43	
80°	2,436	139,59	2,436	139,59	2,423	138,83	

Tabelle 2

Projektionszentren auf der y- bzw. x-Achse in Abhängigkeit von der geographischen Breite		
φ	x^*	y^*
0		0
10	0,5000	0,0592
20	0,4931	0,1179
30	0,4928	0,1814
40	0,4855	0,2492
50	0,4786	0,3270
60	0,4598	0,4148
70	0,4353	0,5261
80	0,3871	0,6797

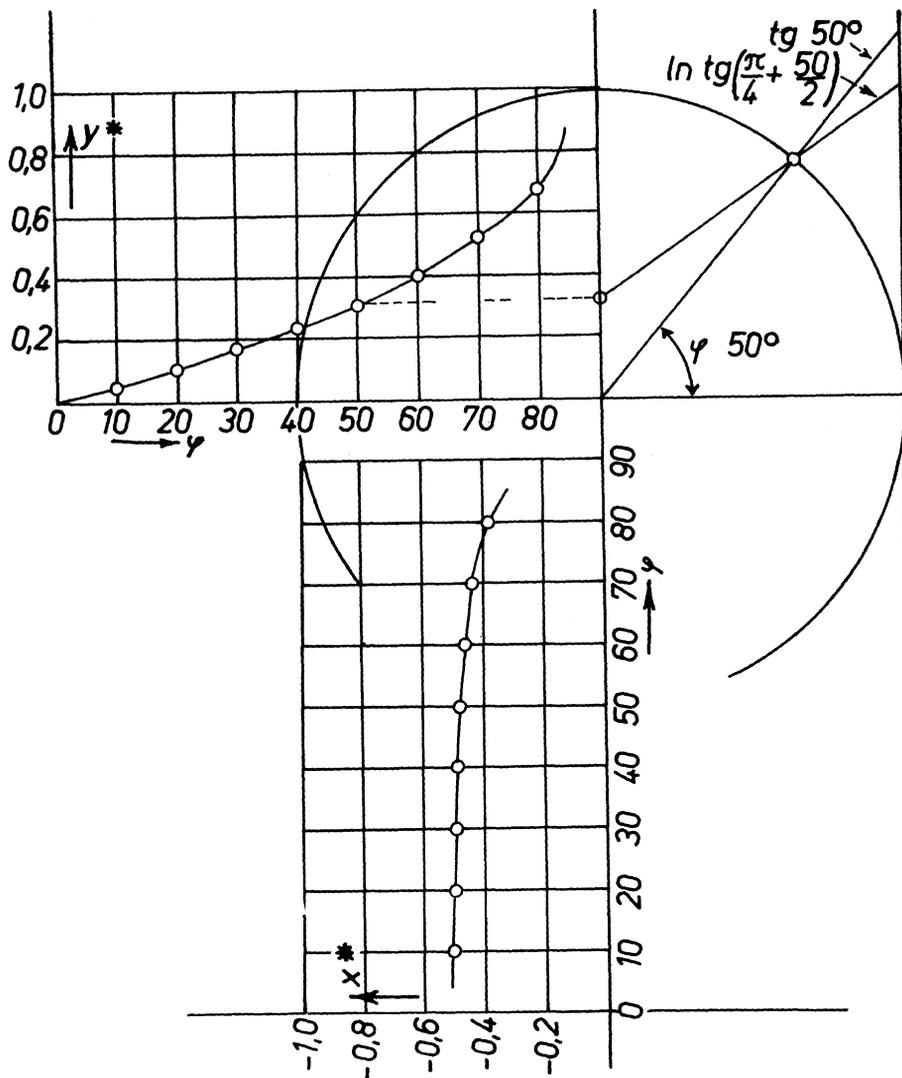


Abb. 4

Breusing'sche Verfahren die besten Werte. Gewiß sind sie denen von Nordenskiöld überlegen, da dieser für jeden Breitenstreifen von 10° einen Sekanswert, während Breusing das arithmetische Mittel von je zwei Werten einsetzt. Wenn

H. Wagner (12) in seiner eingehenden Studie der Weltkarte von 1569 bei der Breslauer Ausgabe und Pariser Kopie nach Jomard mehr für die Breusing'sche Lösung eintritt, so liegt es daran, weil diese den Mercatorwerten am nächsten

Tabelle 3

Abstände der Breitenparallelen in
Graden vom Äquator
Berechnete Näherungswerte

Breiten	Theorie	Breusing	Norden- skiöld	neu Hipparch
10°	10,05	10,05	10,04	10,05
20°	20,42	20,41	20,39	20,43
30°	31,47	31,46	31,42	31,49
40°	43,71	43,69	43,63	43,73
50°	57,91	57,87	57,77	57,91
60°	75,45	75,39	75,20	75,40
70°	99,43	99,29	98,86	99,13
80°	139,59	139,02	137,50	137,88

Breitenabstände für je 10°.

Berechnete Näherungswerte

Breiten	Theorie	Breusing	Norden- skiöld	neu Hipparch
0—10°	10,05	10,05	10,04	10,05
10—20°	10,37	10,36	10,35	10,38
20—30°	11,05	11,05	11,03	11,06
30—40°	12,24	12,23	12,21	12,24
40—50°	14,20	14,18	14,14	14,18
50—60°	17,54	17,52	17,43	17,49
60—70°	23,98	23,90	23,66	23,73
70—80°	40,16	39,73	38,64	38,75

kommt. Müller-Reinhard gibt nach Ausmessung des Organum directorium der Nordenskiöld'schen Auffassung den Vorzug, weil sie sich gedanklich am besten mit Mercators eignen kurzen Angaben in der Legende auf der großen Weltkarte (siehe Averdunk-Müller S. 128) abstimmen läßt. Die Hipparch'sche Näherung liefert nur etwas geringfügig bessere Zahlenwerte als jene von Norden-skiöld.

Alle bisher entwickelten Näherungsverfahren, so geistreich sie auch sein mögen, nehmen zu wenig Bezug auf die wirklich vorhandenen kartographischen und mathematischen Voraussetzungen bei Mercator, sondern können mehr als umschriebene Approximation des bereits vorliegen-

den Integrals $\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos\varphi}$ der Abbildungsfunktion gesehen werden. Darum erscheint es notwendig, die Untersuchung von einem anderen Ansatzpunkt ausgehen zu lassen.

9. Der Globus von 1541 und die Weltkarte (1569) Mercators

Das Rätsel über die Konstruktion der Weltkarte (1569) hat in der Mercatorforschung zu vielseitigen Erörterungen geführt. Sollte Mercator eine so geniale Lösung gefunden haben, die uns bis heute unauffindbar erscheint, oder hat man bisher dem einfachsten Lösungsweg zu wenig Beachtung geschenkt? Vermutlich wird ihm die Idee zu seiner neuen Projektion gekommen sein, als er die bedruckten Globussegmente, wie sie auf der Duisburger Mercator-Ausstellung 1950 nach einem Druck der belgischen Regierung von 1875 zu sehen waren, mit denen die Kugeln beklebt wurden, nebeneinander in gerader Äquatorlinie in die Ebene ausgebreitet hatte. Leider fehlt darüber jeder Hinweis. Bei dieser Frage geht es um die Entscheidung, ob zwischen der von Mercator entworfenen Weltkarte (1569) und dem von ihm

geschaffenen Globus (1541) ein grundlegender Zusammenhang besteht, der über die Genauigkeit der einfachen Maßstabverhältnisse hinausgeht.

Hierzu könnte eine unscheinbare Bemerkung von H. Wagner (11) die erste Andeutung geben. Danach zeigen die beiden letzten Loxodromen auf dem Globus Konstruktionsfehler in den Schnittpunkten mit der 60° Breite, und auch auf der Weltkarte (1569) liegt die gleiche Breite nach Messungen von Nordenskiöld (9, S. 65) und Müller-Reinhard (1, S. 133) um mehr als 1° unter dem theoretischen Wert. Das ist nicht zufällig.

Bisher sind ohne besonderen Hinweis die Maßstabverhältnisse bei der Pariser Kopie (Jomard) mit 1 : 20 100 000 und bei der Berliner Ausgabe mit 1 : 20 600 000 aufgeführt worden. Wie kommt Mercator zu solchen Maßstabgrößen? Das soll jetzt näher geprüft werden.

J. van Raemdonck gibt im Vorwort zur Faksimileausgabe von 1875 für einen Globus den merkwürdig genauen Umfang $U = 129,05$ cm an, woraus Fiorini einen Durchmesser von 41,1 cm berechnete, das entspricht etwa einem Maßstabverhältnis von 1 : 32 000 000.

Berechnet man daraus den Quotient der Maßstabverhältnisse, so erhält man:

$$\begin{aligned} \text{Globus (1541) : Jomard'schen Kopie} &= 1 : 1,592 \\ \text{Globus (1541) : Berliner Ausgabe} &= 1 : 1,553 \end{aligned}$$

(Durchmesser der Erde $d = 12754$ km)

Das entspricht dem ungefähren Zahlenverhältnis von 2 : 3. Benutzt man aber das reiche Zahlenmaterial, welches H. Wagner (12) in seiner dritten Veröffentlichung: „Kartometrische Analyse der Weltkarte G. Mercators vom Jahre 1569“ wiedergegeben hat, so wird der Quotient erheblich genauer. Aus dieser Arbeit wurden die vergrößerten Breitenabstände entnommen und in Tabelle 4 nach Wagner bei der Jomard'schen Kopie für je 10° Äquatorbreite 53,1 bzw. 54,5 mm, bei der Breslauer Ausgabe entsprechend 53 bzw.

Tabelle 4
Tafel der Meridionalteile nach Mercators Weltkarte (1569) und Globus (1541)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Breite φ	Theorie Φ	Breslauer Karte n. Wagner $\Phi = 10^\circ$ $\Phi = 53$ mm	Karte n. Wagner $\Phi = 10^\circ$ $\Phi = 54,2$ mm	Pariser Kopie n. Wagner $\Phi = 10^\circ$ $\Phi = 53,1$ mm	Pariser Kopie n. Wagner $\Phi = 10^\circ$ $\Phi = 54,5$ mm	Φ_m	Globus $d_1 =$ 410 mm Φ_1	Globus $d_2 =$ 411 mm Φ_2	$F = \frac{\Phi_m}{\Phi_2}$		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	10,05	10,06	53,20	54,53	10,15	53,90	55,32	54,24	35,96	36,04	1,505
20	20,42	20,52	108,52	111,22	20,59	109,4	112,2	110,4	73,05	73,25	1,507
30	31,47	31,44	166,26	170,4	31,56	167,6	172,0	169,1	112,6	112,9	1,498
40	43,71	43,73	231,3	237,1	43,89	233,1	239,2	235,2	156,4	156,8	1,500
50	57,91	57,90	306,2	313,8	58,06	308,3	316,4	311,2	207,1	207,5	1,500
60	75,45	75,41	398,7	408,7	75,57	401,2	411,8	405,1	270,2	270,8	1,500
70	99,43	99,24	524,8	537,9	99,40	527,8	541,8	533,1	355,7	356,5	1,495
80	139,59	139,51	737,7	756,1	139,57	741,1	760,7	750,4	499,4	500,6	1,500

$$F_{\text{arith.}} = 1,5006$$

54,2 mm eingesetzt und berechnet. Die Weltkarte (1569) besteht aus 18 verschiedenen Blättern, die sich nicht genau aneinanderfügen lassen und daher zu Doppelwerten für die Äquatorbreite führen. In den Wertereihen 4, 5, 7 und 8 von Tabelle 2 sind sie eingesetzt. Um alle vorhandenen Fehlerstreuungen auszugleichen, die *H. Wagner* in seiner Arbeit näher diskutiert hat, sind in Kolonne 9 die arithmetischen Mittel der genannten Reihen eingetragen. Die Kolonnen 10 und 11 geben die theoretischen Mercatorbreiten für die Globen mit $d_1 = 410$ bzw. $d_2 = 411$ mm wieder. Bildet man jetzt das Verhältnis von 9 und 11, d. h. den Quotienten der Mercatorbreite von Weltkarte (1569) und Globus (1541), so erhält man im Mittel das überraschende Ergebnis von

1,5006 : 1. Kann man für den Globus (1541) die theoretischen Mercatorbreiten einsetzen?

Vergleicht man dazu die berechneten und gemessenen Werte aller Loxodromen, die vom Äquator des Duisburger Originalglobus (1541) ausstrahlen, wie sie in Tabelle 5 zusammengefaßt sind, so ist man, von wenigen Abweichungen abgesehen, über die Genauigkeit und Sorgfalt erstaunt, mit der Mercator seine Loxodromen gezogen hat. Wenn man außerdem beachtet, daß der ursprünglich entworfene Globus, von dem Mercator die Übertragung auf die Kupferplatten zum Druck der Globussemente durchgeführt hat, wahrscheinlich noch genauer gewesen sein muß, so verdichten alle diese Tatsachen das

Tabelle 5

Vergleich von Theorie und Messung an Loxodromenschnittpunkten mit den Meridianen und den zugehörigen Loxodromenlängen am Originalglobus (1541) Mercators des Niederrheinischen Museums zu Duisburg.

Kurswinkel α		$\lambda = 15^\circ$	$\lambda = 30^\circ$	$\lambda = 45^\circ$	$\lambda = 60^\circ$	$\lambda = 75^\circ$	$\lambda = 90^\circ$	$\lambda = 105^\circ$	$\lambda = 120^\circ$	$\lambda = 150^\circ$	
78,75°	φ	ber.	3,00°	5,97°	8,90°	11,83°	14,80°	17,60°	20,43°	23,20°	28,56°
		gem.	2,95°	6,04°	9,05°	11,90°	14,85°	17,80°	20,50°	23,50°	28,58°
	s	ber.	5,62	11,17	16,65	22,14	27,69	32,93	38,23	44,41	53,50
		gem.	5,63	11,20	16,70	22,30	27,65	33,22	38,20	44,15	54,10
67,50°	φ	ber.	6,20°	12,33°	18,20°	24,10°	29,63°	34,86°			
		gem.	6,20°	12,40°	18,30°	24,16°	29,46°	34,65°			
	s	ber.	5,92	11,76	17,36	23,14	28,28	33,24			
		gem.	5,94	11,80	17,77	22,90	28,30	33,20			
56,25°	φ	ber.	9,97°	19,63°	28,77°	37,17°	44,70°	51,40°			
		gem.	9,95°	19,70°	28,80°	37,14°	44,80°	51,35°			
	s	ber.	6,55	12,90	18,90	24,42	29,37	33,77			
		gem.	6,54	12,90	19,38	24,40	29,30	33,52			
45,00°	φ	ber.	14,83°	28,70°	41,00°	51,33°	59,75°				
		gem.	14,85°	28,70°	41,00°	51,37°	59,40°				
	s	ber.	7,66	15,05	21,16	26,50	30,84				
		gem.	7,65	14,96	21,40	26,32	30,45				
33,75°	φ	ber.	21,90°	40,90°	55,66°	66,43°					
		gem.	21,90°	40,30°	55,25°	66,50°					
	s	ber.	9,61	17,95	24,44	29,17					
		gem.	9,70	17,80	24,64	29,24					
22,50°	φ	ber.	34,06°	58,47°	72,93°						
		gem.	34,25°	58,50°	73,20°						
	s	ber.	13,50	23,10	28,81						
		gem.	13,20	23,12	29,34						
11,25°	φ	ber.	59,96°	81,77°							
		gem.	60,00°	81,90°							
	s	ber.	22,32	30,42							
		gem.	22,50	30,45							

ber. = berechnet
 gem. = gemessen
 Umfang des Duisburger Globus (1541)
 $U = 131,4$ cm, $d = 41,82$ cm

Erklärung der Bezeichnungen:

1. Der Kurswinkel α ist von der Nordrichtung aus gerechnet, gemessen in Graden.
2. Loxodromengleichung: $\lambda \cdot \cotg \alpha = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) + C$, $\lambda =$ geogr. Länge.
3. Loxodromenlänge vom Äquator ($\varphi = 0$; $\lambda = 0$) zu einem Orte (φ ; λ) ist: $s = R \frac{\varphi}{\cos \alpha}$, gemessen in cm.
4. Jeder eingetragene Meßwert ist durch Mittelung aus 2—5 einzeln gemessenen Größen erhalten worden.
5. Zur Kontrolle mußten die Loxodromen in einigen Fällen ganz gering verlängert werden.

- d) Die erweiterten Mercatorbreiten bei der Breslauer Karte wie bei der Pariser Kopie (*Jomard*) (Tabelle 4) oszillieren ebenso wie die Loxodromenwerte des Globus (1541) (Tabelle 5) um die theoretischen Werte, während die Näherungslösungen stets kleiner ausfallen (Tabelle 3).
- e) Das Gradnetz des Organum directorium leitet sich nach H. Wagner aus dem Reduktionsverhältnis 2 : 5 der Weltkarte ab. Nun kann man sofort folgende Verhältnisgleichungen für die Mercatorbreiten hinschreiben:

Organum directorium: Globus (1541) : Weltkarte (1569) = 3 : 5 : 7,5.

- f) Dieses neuartige Ergebnis kann als die erste Bestätigung für die von H. Wagner geäußerte Vermutung angesehen werden, daß Mercator weder durch arithmetische noch durch besondere graphische Verfahren seine Breiten ermittelt hat, sondern durch sorgfältigen Abgriff seiner eingezeichneten Loxodromen vom Globus des Jahres 1541.

Übersichtsverteilung der Loxodromenbüschel beim Globus (1541) und bei der Weltkarte (1569)

Globus (1541)		Weltkarte (1569)	
Äquator		Äquator	
λ	φ	λ	φ
1. 0°	0°	0°	0°
2. 30°	0°		
3. 90°	0°	90°	0°
4. 120°	0°	120°	0°
5. 150°	0°		
6. 180°	0°	180°	0°
7. 210°	0°	210°	0°
8. 240°	0°	240°	0°
9. 270°	0°	270°	0°
Nördliche Halbkugel		Nördliche Halbkugel	
1. 240°	28,50°	20°	70°
2. 330°	28,70°	160°	20°
3. 358°	38,30°	210°	30°
4.		290°	23,6°
5.		330°	30°
6.		350°	50°

DIE PROBLEMATIK DER HECKENLANDSCHAFT
Ihr geographisches Wesen und ihre Bedeutung für die Landeskultur

Inhaltsübersicht

1. R. Geiger, Der künstliche Windschutz als meteorologisches Problem.
2. H. Wendt, Der Einfluß der Hecken auf den landwirtschaftlichen Ertrag.
3. W. Tischler, Die Hecke als Lebensraum für Pflanzen u. Tiere, unter besonderer Berücksichtigung ihrer Schädlinge.
4. W. Hartke, Die Heckenlandschaft. Der geographische Charakter eines Landeskulturproblems.
5. C. Troll, Heckenlandschaften im maritimen Grünlandgürtel und Gäuland Mitteleuropas.

Südliche Halbkugel		Südliche Halbkugel	
1. 60°	44,50°	30°	10°
2. 90°	28,45°	40°	40°
3. 30°	28,50°	80°	30°
4. 120°	28,50°	280°	30°
5. 180°	28,70°	290°	50°
6. 240°	28,75°	330°	50°
7. 270°	51,30°	350°	30°
8. 330°	51,33°		
9. 360°	28,50°		

Die Loxodromenbüschel bei der Weltkarte, welche auf der nördlichen und südlichen Halbkugel liegen, sind nach Konstruktion der Karte sicher eingetragen worden.

Vom Organum directorium kennt man bisher nur das Maßstabverhältnis von 2 : 5 zur Weltkarte, aber sicherlich enthält es noch weitere wesentliche kartographische Beziehungen, deren entscheidende Klärung der künftigen Forschung vorbehalten ist. Ob dabei die originale Konstruktionsableitung von P. Diercke (4) bestätigt wird, bedarf noch eingehender Untersuchungen.

Herrn Prof. Dr. C. Troll, Bonn, wie Herrn Dr. Tischler, Duisburg, sei für alle freundliche Unterstützung ganz besonders gedankt.

Literaturnachweis:

1. A. Averdunk u. J. Müller-Reinhard, G. Mercator und die Geographen unter seinen Nachkommen. Ergänzungsheft Nr. 182 von Petermanns Mitteilungen, Gotha 1914.
2. J. Bathe, Zur Geschichte der Tafeln der Meridionalteile. Ann. d. Hydr. 1915, Bd. 43, S. 425 u. 482.
3. A. Breusing, Verebenen der Kugelfläche. Leipzig 1892, S. 30—50.
4. P. Diercke, Die geographische Konstruktion der Mercatorkarte. Ann. d. Hydr. 1929, S. 61.
5. H. Dörrie, Triumph der Mathematik. Hirt, Berslau 1940, S. 317.
6. E. Gelcich, Vermischte Studien zur Geschichte der math. Geographie. Zeitschr. f. wiss. Geogr. Bd. V, S. 291, 1885.
7. S. Günther, Festschrift des Naturwissenschaftlichen Vereins zu Krefeld 1908, S. 228.
8. J. E. Hoffmann, Die Entwicklungsgeschichte der Leibnizschen Mathematik. Leibnizverl., Münch. 1949, S. 186.
9. A. E. Nordenskiöld, Facsimile-Atlas, Stockholm 1889.
10. H. Wagner, Gerhard Mercator und die ersten Loxodromen auf Karten. Ann. d. Hydr. 1915, Bd. 43, S. 299.
11. Ann. d. Hydr. 1915, Bd. 43, S. 348.
12. H. Wagner, Kartometrische Analyse der Weltkarte G. Mercators vom Jahre 1569, ebenda, S. 377.

Vorwort des Herausgebers

Im Zusammenhang mit den Fragen des Naturschutzes und der Landschaftsgestaltung ist in Deutschland neuerdings die Frage der lebenden Feldhecken und der Heckenlandschaft sehr stark in das Interesse der Wissenschaft und auch der öffentlichen Verwaltung gerückt. Geographen, Land- und Forstwirte, Pflanzensoziologen, Kli-